

AXIOMATIK ALS METHODE PHYSIKALISCHER THEORIENBILDUNG

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Philosophischen Fakultät
der Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von

Dipl. Phys. Gottfried Falk

aus Gelsenkirchen

Marburg 1951

D 4



Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg

Als Dissertation angenommen am 26. Juli 1950

Berichterstatter : Professor Dr. S. FLÜGGE

Mitberichterstatter: Professor Dr. C. HERMANN

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juli 1950

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät

Die Dissertation erscheint auch in der Zeitschrift für Physik
Bd. 130, S. 51 bis 68

Axiomatik als Methode physikalischer Theorienbildung.

Von

GOTTFRIED FALK.

(Eingegangen am 9. April 1951.)

Die rapide Entwicklung der experimentellen und theoretischen Physik hat ein wachsendes Interesse an Theorienbildungen wachgerufen. Dabei handelt es sich einmal um mathematische Beschreibungsweisen physikalischer Sachverhalte in möglichst engem Anschluß an vorhandene Theorien, zum anderen etwa um Fragen der Äquivalenz von Theorien, die sich verschiedener mathematischer Kalküle bedienen. Für den ersten Fall geben klassische und Quantenmechanik ein Beispiel; diese beiden Theorien stehen in einem gewissen Verwandtschaftsverhältnis, welches durch das BOHRsche Korrespondenzprinzip ausgedrückt werden kann. Dieses Prinzip wird im allgemeinen zur Beurteilung derartiger Verwandtschaftsverhältnisse benutzt. Für den zweiten Fall der Äquivalenz zweier Theorien bieten die HEISENBERGSche und SCHRÖDINGERSche Formulierung der Quantenmechanik ein instruktives Beispiel.

Die Mathematik hat nun in der Axiomatik eine Methode entwickelt, die sich mit der Untersuchung der Struktur von Theorien beschäftigt. Die Äquivalenz zweier Theorien kann im Hinblick auf die Axiomatik so ausgesprochen werden, daß die Grundaussagen dieser Theorien äquivalent sind, d.h. daß beide Theorien auf ein einziges System von Grundaussagen gegründet werden können. Äquivalente Theorien können demnach axiomatisch als identisch betrachtet werden. Im obigen Sinn verwandte Theorien stimmen — wie ein Blick auf das Verhältnis von klassischer und Quantenmechanik lehrt — in einer Reihe von Eigenschaften überein, die etwa einer Anzahl durch experimentelle Erfahrung gegebener Tatsachen entsprechen können. In der Sprache der Mathematik heißt das: *Verwandte Theorien haben eine Anzahl von Axiomen gemeinsam.* Die Verwandtschaft zweier Theorien wird um so enger sein, je umfassender der gemeinsame Teil ihrer Axiome ist. Wenn andererseits eine Theorie in einer axiomatischen Form vorliegt, bietet sich in der Änderung bestimmter Axiome eine *systematische* Möglichkeit, verwandte Theorien zu konstruieren und in ihren mathematischen wie physikalischen Eigenschaften zu untersuchen.

Im folgenden soll eine axiomatische Untersuchung solcher Theorien mit einem gemeinsamen Axiomenteil am Beispiel der klassischen und

Quantenmechanik durchgeführt werden. Die Darstellung zeigt überdies, daß diese logische Durchleuchtung von Theorien auch für Zwecke des praktischen Kalküls dienlich ist. Dabei angewendete mathematische Methoden werden schließlich noch benutzt, um einen formalen Zusammenhang zwischen den MAXWELLSchen Gleichungen und der relativistischen Quantenmechanik in Form der DIRACschen Theorie aufzuzeigen. Als physikalische Folgerung ergibt sich, daß in einer konsequenten relativistischen Quantenmechanik die Ruhmasse als Operator aufgefaßt werden muß, der nicht immer mit dem Operator der Gesamtenergie gleichzeitig auf Diagonalgestalt gebracht werden kann. Es scheint die Hoffnung begründet, daß diese axiomatische Methode auch in der Quantentheorie der Wellenfelder verwendet werden kann.

§ 1. Axiomatik der klassischen Mechanik.

Im Hinblick auf den Zweck wählen wir als Ausgangspunkt die HAMILTONsche Form der klassischen Mechanik. Dies bietet den mathematischen Vorteil, Eigenschaften von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung verwenden zu können, die mit der LIESchen Theorie der Transformationsgruppen zusammenhängen und die sich algebraisch sehr einfach fassen lassen. Andererseits scheint von unserem heutigen Kenntnisstand aus die HAMILTONsche Mechanik auch physikalisch insofern einen Vorteil zu bieten, als man in ihr die Bewegung eines bestimmten mechanischen Systems durch eine Untergruppe der kanonischen Gruppe charakterisieren kann; bei Vorgabe von Anfangskoordinaten und Anfangsimpulsen zu einer Zeit $t=0$ lassen sich die Koordinaten und Impulse zu irgendeiner Zeit $t \neq 0$ durch eine kanonische Transformation aus den Anfangswerten gewinnen. Die Größen des mechanischen Systems gehen also in ihrer zeitlichen Entwicklung durch Transformationen auseinander hervor, die einer bestimmten — nämlich der durch die HAMILTON-Funktion des Systems infinitesimal erzeugten — eingliedrigen Untergruppe der kanonischen Gruppe angehören. Diese Beschreibungsweise eines klassischen mechanischen Systems läßt bereits einen begrifflichen Übergang zur Quantenmechanik erkennen.

Zunächst werde die übliche Beschreibungsweise der klassischen HAMILTONschen Theorie abgeschlossener Systeme kurz umrissen. Zugrunde gelegt werden die HAMILTONschen Gleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1)$$

in denen die $2n$ Koordinaten q_i und Impulse p_i als unabhängige (kanonisch-konjugierte) Variable auftreten, während die Energie $H = H(q_i, p_i)$ als Funktion dieser aufgefaßt wird. Die Zeit t spielt die Rolle eines Parameters. Diese Gleichungen gestatten die Transformationen der

kanonischen Gruppe, die aus solchen Transformationen

$$Q_k = Q_k(q_i, p_i), \quad P_k = P_k(q_i, p_i) \quad (2)$$

besteht, für die

$$\sum_i p_i dq_i - \sum_k P_k dQ_k$$

ein totales Differential einer Funktion der q_i, p_i ist. Bekanntlich kann man aber die kanonische Gruppe auch durch die sog. POISSON-Klammern — im folgenden mit PK abgekürzt — definieren. Diese werden für zwei beliebige Funktionen $\varphi(q_i, p_i)$ und $\psi(q_i, p_i)$ folgendermaßen gebildet:

$$[\varphi(q_i, p_i), \psi(q_i, p_i)] = \sum_i \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right\}. \quad (3)$$

Als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß Transformationen von der Art (2) kanonisch sind, ergeben sich die Relationen

$$[Q_i, Q_k] = 0, \quad [P_i, Q_k] = \delta_{ik}, \quad [P_i, P_k] = 0. \quad (4)$$

Für zwei beliebige Funktionen $\varphi(q_i, p_i)$ und $\psi(q_i, p_i)$ und ihre transformierten $\Phi(Q_i, P_i) = \varphi(q_i(Q_k, P_k), p_i(Q_k, P_k))$ und $\Psi(Q_i, P_i)$ gilt dann

$$[\varphi, \psi] = [\Phi, \Psi].$$

Allgemein gilt für die PK bei beliebigen Transformationen der q_i, p_i in $2n$ Funktionen $a_k = a_k(q_i, p_i)$

$$[\varphi, \psi] = \sum_{i,k} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial \psi}{\partial a_k} [a_i, a_k].$$

Schließlich nehmen mit Verwendung der PK die HAMILTONSchen Gleichungen die bekannte Form an

$$\frac{dq_i}{dt} = [H, q_i], \quad \frac{dp_i}{dt} = [H, p_i]. \quad (1a)$$

Im Hinblick auf unser Ziel, die Mechanik axiomatisch zu fassen, stellen wir die — aus (3) ablesbaren — algebraischen Eigenschaften der PK zusammen. Es ist

$$\left. \begin{array}{ll} \text{a) } [\varphi, \psi] = -[\psi, \varphi] & \text{b) } [\varphi, \psi_1 + \psi_2] = [\varphi, \psi_1] + [\varphi, \psi_2] \\ \text{c) } [\varphi, \alpha \psi] = \alpha [\varphi, \psi] & \text{d) } [\varphi, \psi_1 \cdot \psi_2] = [\varphi, \psi_1] \psi_2 + \psi_1 [\varphi, \psi_2] \\ \text{e) } [\varphi, [\psi, \chi]] + [\psi, [\chi, \varphi]] + [\chi, [\varphi, \psi]] = 0. \end{array} \right\} \quad (\text{I})$$

Die auftretenden Größen φ, ψ, χ sind dabei als Funktionen der q_i, p_i gemeint, während a eine gewöhnliche Zahl sein soll. Die zusammengestellten Formeln ermöglichen eine axiomatische Kennzeichnung der HAMILTONSchen Mechanik.

Gegeben seien $2n$ Größen q_i, p_i . Wir betrachten die Gesamtheit $\mathfrak{F}_K$ aller aus ihnen gebildeten *formalen* (kommutativen) Potenzreihen mit reellen Zahlen als Koeffizienten. $\mathfrak{F}_K$ ist im Sinne der Algebra ein Ring, d.h. die Potenzreihen kann man als Elemente von $\mathfrak{F}_K$ addieren und multiplizieren, und diese Addition und Multiplikation genügen den üblichen Axiomen einschließlich der Kommutativität der Multiplikation. Die Eins komme unter den Potenzreihen ebenfalls vor. Weiter sei in $\mathfrak{F}_K$ eine Operation „Klammerbildung“ definiert, die je zwei Elementen aus $\mathfrak{F}_K$ ein anderes Element aus $\mathfrak{F}_K$ zuordnet mit den Eigenschaften (I), wobei φ, ψ, χ nun Potenzreihen aus $\mathfrak{F}_K$ sind. Für die q_i, p_i^1 soll die Klammerbildung definiert sein durch die Relationen:

$$[q_i, q_k] = 0, \quad [p_i, q_k] = \delta_{ik}, \quad [p_i, p_k] = 0. \quad (\text{II})$$

Durch die Axiome (I) und (II) ist der Prozeß der Klammerbildung in $\mathfrak{F}_K$ eindeutig definiert, d.h. für zwei vorgegebene Potenzreihen φ und ψ ist $[\varphi, \psi]$ als Potenzreihe aus diesen Axiomen zu berechnen. Das Axiom (Ib) zeigt, daß man sich in der näheren Untersuchung auf die einzelnen Glieder einer Potenzreihe beschränken kann, (Ic) besagt weiter, daß dazu bereits die Betrachtung der Potenzprodukte der q_i, p_i genügt. Weiter sieht man, daß die Bildungen $[p_i, \psi]$ und $[q_i, \psi]$ alle Eigenschaften der Differentiationen $\partial\psi/\partial q_i$ und $-\partial\psi/\partial p_i$ haben; diese partiellen Differentiationen sind dabei im üblichen Sinn der Analysis verstanden, und da die Elemente von $\mathfrak{F}_K$ Potenzreihen sind, haben diese Differentiationen konkreten Sinn. Da die Klammerbildung durch (I) und (II) eindeutig definiert ist, die Differentiation aber dieselben Axiome erfüllt wie $[p_i, \psi]$, $[q_i, \psi]$, so müssen also in $\mathfrak{F}_K$ diese Operationen identisch sein, d.h. es gilt

$$[p_i, \psi] = \frac{\partial\psi}{\partial q_i}, \quad [q_i, \psi] = -\frac{\partial\psi}{\partial p_i}. \quad (5)$$

Sei nun φ ein Potenzprodukt in den q_i, p_i : $\varphi = p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2} \dots q_n^{\mu_n}$. Wendet man die aus (Ia) und (Id) folgende Beziehung

$$[\varphi_1 \cdot \varphi_2, \psi] = [\varphi_1, \psi] \varphi_2 + \varphi_1 [\varphi_2, \psi]$$

wiederholt auf $[\varphi, \psi]$ an, so folgt

$$[\varphi, \psi] = v_1 p_1^{v_1-1} p_2^{v_2} \dots q_n^{\mu_n} [p_1, \psi] + v_2 p_1^{v_1} p_2^{v_2-1} \dots q_n^{\mu_n} [p_2, \psi] + \dots + \mu_n p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots q_n^{\mu_n-1} [q_n, \psi].$$

Daraus wiederum schließt man mit Benutzung von (5) analog wie oben:

$$[\varphi, \psi] = \sum_i \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial p_i} \frac{\partial\psi}{\partial q_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} \frac{\partial\psi}{\partial p_i} \right\}.$$

¹ Wir wollen sie, einem mathematischen Sprachgebrauch folgend, *Erzeugende* des Ringes nennen.

Man sieht also, daß in $\mathfrak{F}_K$ die durch (I) und (II) axiomatisch definierte Klammerbildung eindeutig auf die aus der klassischen Mechanik bekannte Gestalt (3) der PK schließen läßt. Es sei noch darauf hingewiesen, daß wir bei den obigen Ausführungen die JACOBIsche Identität (Ie) nicht benutzt haben; da man sie andererseits aus (3) folgern kann, muß sie eine aus den übrigen Axiomen ableitbare Beziehung sein¹.

Jede Auswahl von $2n$ Elementen Q_i, P_i aus $\mathfrak{F}_K$, welche die Eigenschaft haben, daß sich die q_i, p_i als formale Potenzreihen in ihnen ausdrücken lassen und für die ebenfalls die Relationen (II) gelten, sollen eine „kanonische Basis“ heißen.

In dem so charakterisierten Bereich $\mathfrak{F}_K$ wird das Grundgesetz der Mechanik formuliert. Jedes spezielle (abgeschlossene) mechanische System wird durch ein *bestimmtes* Element H aus $\mathfrak{F}_K$, die HAMILTON-Funktion $H(q_i, p_i)$ des Systems beschrieben, und zwar in folgendem Sinn: Die von einem Parameter t (Zeit) abhängigen Größen $q_i(t), p_i(t)$ beschreiben die Entwicklung des Systems aus seinem durch die „Anfangsgrößen“ q_i^0, p_i^0 — die nun als die Erzeugenden von $\mathfrak{F}_K$ betrachtet werden — beschriebenen Anfangszustand nach dem „Bewegungsgesetz“:

$$\left. \begin{aligned} q_i(t) &= q_i^0 + t [H_0, q_i^0] + \frac{t^2}{2!} [H_0, [H_0, q_i^0]] + \cdots \\ p_i(t) &= p_i^0 + t [H_0, p_i^0] + \frac{t^2}{2!} [H_0, [H_0, p_i^0]] + \cdots, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

wobei $H_0 = H(q_i^0, p_i^0)$ bedeuten soll. Die $q_i(t), p_i(t)$ sind also einparametrische Scharen spezieller Elemente aus $\mathfrak{F}_K$. Wir können (III) auch symbolisch in der Form schreiben

$$q_i(t) = e^{t[H_0, \dots]} q_i^0, \quad p_i(t) = e^{t[H_0, \dots]} p_i^0, \quad (\text{IIIa})$$

wobei das Symbol $e^{t[H_0, \dots]}$ durch (III) definiert ist. Dieses Symbol können wir für festgehaltenes t als Transformation in $\mathfrak{F}_K$ auffassen, dann ist $q_i(t)$ die durch Anwendung der Transformation $e^{t[H_0, \dots]}$ aus q_i^0 hervorgehende Größe. Entsprechendes gilt natürlich auch für $p_i(t)$. Die Definitionen (III) des Bewegungsgesetzes sind bekanntlich nichts anderes als die formalen Lösungen der Differentialgleichungen (1a) und sind infolgedessen mit diesen gleichwertig, d.h. aus (III) lassen sich die Gl. (1a) gewinnen.

Die durch (III) definierte Operation $e^{t[H_0, \dots]}$ hat — neben der Linearität — drei wesentliche Eigenschaften: 1. sie besitzt ein Inverses, das formell mit $e^{-t[H_0, \dots]}$ bezeichnet wird, 2. sie führt kanonische Basen stets in kanonische Basen über und 3. ist das Produkt zweier

¹ Diese Folgerung gilt hier zunächst nur für den kommutativen Ring, man kann aber zeigen, daß sie auch im nichtkommutativen Fall richtig ist.

transformierter Größen gleich dem Transformierten des Produktes der ursprünglichen Größen. Ordnet man z.B. die Reihen nach Potenzen von t , so bestätigt man leicht

$$e^{-t[H_0, \dots]} (e^{t[H_0, \dots]} q_i^0) = q_i^0 + t \{ [H_0, q_i^0] - [H_0, q_i^0] \} + \\ + t^2 \{ [H_0, [H_0, q_i^0]] - [H_0, [H_0, q_i^0]] \} + \dots = q_i^0.$$

Um die zweite Eigenschaft zu beweisen, bildet man z.B.

$$[p_i(t), q_k(t)] = [p_i^0, q_k^0] + t \{ [p_i^0, [H_0, q_k^0]] - [q_k^0, [H_0, p_i^0]] \} + \dots \\ = [p_i^0, q_k^0];$$

denn die Ausdrücke in den geschweiften Klammern heben sich unter Benutzung der Relation (Ie) und der aus (Id) folgenden Relation $[H_0, 1] = 0$ fort. Schließlich zeigt man unter Benutzung von (Id), daß z.B.

$$p_i(t) \cdot q_k(t) = p_i^0 \cdot q_k^0 + t \{ p_i^0 \cdot [H_0, q_k^0] + [H_0, p_i^0] \cdot q_k^0 \} + \\ + \frac{t^2}{2!} \{ p_i^0 \cdot [H_0, [H_0, q_k^0]] + 2 [H_0, p_i^0] \cdot [H_0, q_k^0] + [H_0, [H_0, p_i^0]] \cdot q_k^0 \} + \dots \\ = e^{t[H_0, \dots]} (p_i^0 \cdot q_k^0).$$

Dasselbe gilt auch für die Produkte $p_i^0 \cdot p_k^0$, $q_i^0 \cdot q_k^0$, $q_k^0 \cdot p_i^0$ sowie für jedes Potenzprodukt der q_i^0 , p_i^0 , wie man durch Rekursion sofort findet. Da außerdem die Operation (III) gegenüber der Addition linear ist, folgt weiter, daß auch für jedes Element $F_0(q_i^0, p_i^0)$ aus $\mathfrak{F}_K$ gilt

$$F(q_i(t), p_i(t)) = F_0 + t [H_0, F_0] + \frac{t^2}{2!} [H_0, [H_0, F_0]] + \dots, \quad (6)$$

speziell gilt also

$$H(q_i(t), p_i(t)) = H_0. \quad (6a)$$

Gl. (6) ist wieder mit der Differentialgleichung

$$\frac{dF}{dt} = [H, F]$$

gleichwertig.

§ 2. Axiomatik der Quantenmechanik.

Um für die Quantenmechanik einen ähnlichen Aufbau vorzunehmen, sei kurz an die für den hier verfolgten Zweck wesentlichen Tatsachen erinnert: Die Multiplikation der Größen q_i , p_i ist nicht mehr kommutativ, vielmehr gelten die HEISENBERGSchen Vertauschungsrelationen

$$q_i q_k - q_k q_i = 0, \quad p_i q_k - q_k p_i = \frac{\hbar}{i} \delta_{ik}, \quad p_i p_k - p_k p_i = 0. \quad (7)$$

Die Bewegungsgleichungen haben die Form

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{i}{\hbar} (H q_i - q_i H), \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{i}{\hbar} (H p_i - p_i H), \quad (8)$$

wobei wieder jedes mechanische Problem durch die Auswahl der HAMILTON-Funktion bestimmt ist; H ist eine Funktion der (nicht-kommutativen) q_i, p_i .

Nun wird derselbe Weg wie oben beschrritten: Wir bilden mit den q_i, p_i als Erzeugenden — welche überdies die Bedingungen (7) erfüllen — den Ring $\mathfrak{F}_H$ der *formalen* (nichtkommutativen) Potenzreihen, deren Glieder nur Potenzprodukte einer fest vorgegebenen Anordnung der q_i, p_i , z.B. nur solche der Form $q_1^{v_1} q_2^{v_2} \dots q_n^{v_n} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \dots p_n^{\mu_n}$ enthalten. Die Koeffizienten sind mit Rücksicht auf (7) nun komplex. In $\mathfrak{F}_H$ sei wieder eine Klammeroperation definiert mit den durch die Axiome (I) und (II) geforderten Eigenschaften. Durch diese Axiome ist in $\mathfrak{F}_H$ die Operation $[\varphi, \psi]$ wieder eindeutig definiert, wenn mit φ und ψ Potenzreihen aus $\mathfrak{F}_H$ bezeichnet werden. Andererseits erfüllt aber die Bildung $\frac{i}{\hbar} (\varphi \psi - \psi \varphi)$ alle Axiome (I) und wegen (7) auch (II). Daraus folgt, daß in $\mathfrak{F}_H$ die Klammeroperation mit dieser Bildung identisch ist:

$$[\varphi, \psi] = \frac{i}{\hbar} (\varphi \psi - \psi \varphi). \quad (9)$$

Die Gl. (8) nehmen damit formal die gleiche Gestalt an wie (1a). Demnach können wir auch das Bewegungsgesetz in der Form (III) bzw. (IIIa) in die axiomatische Fassung der Quantenmechanik übernehmen. Wie man sich leicht überzeugt, nehmen mit (9) die Gl. (III) die Form an

$$q_i(t) = e^{\frac{i}{\hbar} t H_0} \cdot q_i^0 \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} t H_0}, \quad p_i(t) = e^{\frac{i}{\hbar} t H_0} \cdot p_i^0 \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} t H_0}, \quad (10)$$

wobei $e^{\frac{i}{\hbar} t H_0}$ durch die Reihe

$$1 + t \frac{i}{\hbar} H_0 + \frac{t^2}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 H_0^2 + \dots$$

definiert ist. Schließlich kann man auch die Definition der kanonischen Basen in $\mathfrak{F}_H$ aufrecht erhalten und ebenso alle oben angeführten Sätze über die Eigenschaften der Operation $e^{t[H_0, \dots]}$ einschließlich der Gl. (6) und (6a), da sie alle von der Kommutativität der q_i, p_i keinen Gebrauch machen. Das Analogon zu Gl. (6) lautet nun

$$F(t) = e^{\frac{i}{\hbar} t H_0} \cdot F_0 \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} t H_0}, \quad (10a)$$

wobei F_0 ein beliebiges Element aus $\mathfrak{F}_H$ — in dem nun die q_i^0, p_i^0 die Rolle der Erzeugenden spielen — ist.

§ 3. Bemerkungen zur Bedeutung der Axiome.

Man erkennt, daß klassische und Quantenmechanik in ihrem axiomatischen Aufbau fast alle Axiome gemeinsam haben; lediglich die kommutative Multiplikation wird in der Quantenmechanik durch eine die (einschränkenden) Bedingungen (7) erfüllende nichtkommutative Multiplikation ersetzt. Dadurch wird auch die Änderung in der Gestalt der Potenzreihen bedingt sowie das Auftreten komplexer Koeffizienten.

An dieser Stelle drängt sich die Frage auf, ob man unter Beibehaltung aller übrigen Axiome nicht Theorien angeben kann, in denen die Multiplikation nichtkommutativ ist *ohne* oder mit *anderen* (allgemeineren) einschränkenden Bedingungen an Stelle von (7). Mathematisch läuft dieses Problem auf eine systematische Untersuchung von Ringen mit Erzeugenden hinaus, in denen eine POISSON-Klammerbildung definiert ist. Es zeigt sich, daß *der kommutative Ring $\mathfrak{F}_K$ und der Ring $\mathfrak{F}_H$ im wesentlichen* — d. h. bis auf eine Konstante in (7) — *die einzigen sind*¹. Jede weitere Abänderung der Mechanik müßte also an den übrigen Axiomen, insbesondere an der Axiomgruppe (I) angreifen. Deshalb ist es notwendig, die mathematische und physikalische Bedeutung der Axiome (I), (II), (III) näher zu untersuchen.

Das Axiom (III) sagt aus, daß der Bewegungsvorgang eines durch die HAMILTON-Funktion H gekennzeichneten mechanischen Systems — d. h. die zeitlichen Änderungen der an ihm meßbaren physikalischen Größen — durch die Transformationsoperation $e^{t[H, \dots]}$ geregelt wird. Diese Operation ist linear und hat die in § 1 angeführten Eigenschaften. Jede Transformation T eines Ringes in sich mit den Eigenschaften (f, g sind Elemente des Ringes):

$$T(f + g) = T(f) + T(g)$$

$$T(f \cdot g) = T(f) \cdot T(g)$$

ist aber ein *Automorphismus* des Ringes. (III) besagt also: Der Bewegungsvorgang eines mechanischen Systems wird durch eine eingliedrige Schar von Automorphismen — die selbst eine einparametrische kontinuierliche Gruppe bilden — des Ringes der physikalischen Größen beschrieben, wobei die Automorphismen durch die HAMILTON-Funktion des speziellen Systems bestimmt sind. Dies wiederum ist die Bedingung dafür, daß *jede* physikalische Größe, welche an dem mechanischen System gemessen werden kann, durch eine in ihrem Aufbau *eindeutig* festgelegte formale Funktionsbildung der $q_i(t)$, $p_i(t)$ beschrieben werden kann, welche sich während des Bewegungsvorganges in diesem Aufbau nicht ändert — kurz, daß *jede physikalische Größe genau einer formalen Funktionsbildung entspricht*.

¹ FALK, G.: Über Ringe mit POISSON-Klammern. Math. Ann. (im Druck).

Alle bisher über die Transformation $e^{[H, \dots]}$ gemachten Aussagen gelten natürlich auch für jede Operation $e^{[R, \dots]}$, wobei $R = R(q_i^0, p_i^0)$ ein beliebiges Element aus dem Ring $\mathfrak{F}_K$ bzw. $\mathfrak{F}_H$ ist. So bilden z.B. die durch die Gleichungen

$$Q_i = e^{[R, \dots]} q_i^0, \quad P_i = e^{[R, \dots]} p_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

definierten Größen Q_i, P_i wieder eine kanonische Basis, und dies gilt für beliebiges $R = R(q_i^0, p_i^0)$. Da die Transformationen (11) Automorphismen sind, geht unter ihrer Anwendung jede formale Funktionsbildung $F(q_i^0, p_i^0)$ in ein Element $F(Q_i, P_i)$ über, welches in den Q_i, P_i den gleichen formalen Aufbau hat wie $F(q_i^0, p_i^0)$ in den q_i^0, p_i^0 . Schließlich erzeugen die Transformationen (11) eine Gruppe von Automorphismen; denn zu jeder gibt es eine Inverse $e^{-[R, \dots]}$ und die Hintereinanderausführung zweier solcher Transformationen ist wieder ein Automorphismus. Diese Automorphismengruppe wollen wir die *engere kanonische Gruppe* nennen. Die Bezeichnung rechtfertigt sich insofern, als nicht jeder Übergang von einer kanonischen Basis zu einer anderen, als Transformation aufgefaßt, dieser Gruppe angehört, denn man kann leicht (kanonische) Transformationen angeben, die keine Automorphismen sind. Die engere kanonische Gruppe ist also eine echte Untergruppe der allgemeinen kanonischen Gruppe, die aus allen Transformationen besteht, welche kanonische Basen wieder in kanonische Basen überführen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die einfache Relation

$$e^{[R_1, \dots]} (e^{[R_2, \dots]} F) = e^{[R_1 + R_2, \dots]} F \quad (12)$$

allgemein, d.h. für beliebiges $F(q_i^0, p_i^0)$ nur gefolgert werden kann, wenn $[R_1, R_2] = a$, wobei a eine Zahl ist.

In $\mathfrak{F}_H$ kann man unter Benutzung von Gl. (9) die Automorphismen (11) in die Gestalt bringen

$$Q_i = U q_i^0 U^{-1}, \quad P_i = U p_i^0 U^{-1}, \quad U = e^{\frac{i}{\hbar} R}. \quad (13)$$

Das Problem der mathematischen Bedeutung der Axiome (I) und (II) soll hier nicht behandelt werden, da es ein tieferes Eindringen in damit zusammenhängende mathematische Fragen erzwingt¹. Wesentlich für physikalische Zwecke scheint dabei das Ergebnis, daß der Begriff eines partiellen Differentialgleichungssystems mit seinen Integralen — losgelöst von seinem analytischen Inhalt — algebraisch gefaßt werden kann. Damit kann der Begriff eines Integrales der Bewegung — oder wie man auch sagt, einer „Konstanten der Bewegung“ — aus den Axiomen gefolgert werden, was wiederum die Existenz von Erhaltungssätzen für bestimmte Größen in der Theorie ausdrückt. So bedingt z.B. das Axiom (Ia) den mechanischen Energiesatz; denn $[f, f] = 0$ bedeutet,

¹ FALK, G.: I. c.

daß jedes Ringelement f selbst Integral der Bewegung des durch f als HAMILTON-Funktion definierten mechanischen Systems ist¹.

§ 4. Die Bewertung des Ringes der physikalischen Größen.

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf den Ring der physikalischen Größen, dessen Elemente *formale* Potenzreihen in den (kanonischen) Erzeugenden sind. Nunmehr handelt es sich um eine Bewertung dieses Ringes mit Zahlen, d.h. jeder Potenzreihe soll eine Zahl oder auch ein System von Zahlen als ihr „Wert“ zugeordnet werden. Im Fall des kommutativen Potenzreihenringes ist eine geläufige Bewertung die, daß man jeder formalen Potenzreihe die dieser Reihe entsprechende analytische *Funktion*, als Zuordnung von Zahlen zu Zahlen, korrespondieren läßt.

Dieses Problem der Bewertung entspricht dem physikalischen Sachverhalt, daß jede physikalische Größe einmal einer mathematischen Größe (bzw. einer Operation) entspricht, zum anderen aber ihren Meßwerten eine Zahl oder ein System von Zahlen zuzuordnen ist. Diese Verhältnisse werden durch die klassische Physik in ihrer analytischen Fassung etwas verwischt. Jede klassische Gleichung kann nämlich doppelte Bedeutung haben: 1. *als strukturelle Beziehung zwischen mathematischen Symbolen als Repräsentanten physikalischer Größen* und 2. *als Beziehung zwischen Zahlenwerten (Meßwerten) dieser physikalischen Größen*. Bei Anwendung des BOHRschen Korrespondenzprinzips muß man also darauf achten, daß es in dieser zweifachen Bedeutung verwendet werden kann, und teilweise sogar verwendet werden muß. Die bisherigen Ausführungen über den Ring der physikalischen Größen betreffen nur die erste Eigenschaft. Die Bewertung muß nun so erfolgen, daß auch die zweite Eigenschaft der klassischen Theorie berücksichtigt wird. Im übrigen sind diese beiden Eigenschaften nicht unabhängig voneinander.

Die Bewertung des Ringes $\mathfrak{F}_H$ kann mit Hilfe einer Darstellung des Ringes erfolgen. Man betrachtet dazu die Elemente von $\mathfrak{F}_H$ als Operatoren in einem Raum, dessen Elemente die Potenzreihen von $\mathfrak{F}_H$ selbst, oder eines geeigneten Teilbereiches von $\mathfrak{F}_H$ sind. Stationäre Zustände werden dabei durch Eigenwertprobleme definiert. Es soll an dieser

¹ In dieser Allgemeinheit geht die Aussage über die physikalischen Erfordernisse hinaus, da als HAMILTON-Funktionen nur eine spezielle Klasse von Elementen in Frage kommt, nämlich die der Form $\sum_i \{p_i^2 + g_i(q_1 \dots q_n) \cdot p_i \cdot k_i(q_1 \dots q_n)\} + k(q_1 \dots q_n)$. Da andererseits das Axiomensystem (I), (II) in eine Gestalt gebracht werden kann, in der $[f, f] = 0$ als selbständiges Axiom auftritt (l. c.), könnte man vermuten, eine Erweiterung der Theorie dadurch vorzunehmen, daß man $[f, f] = 0$ nur für f aus der eben genannten Klasse fordert. Es läßt sich jedoch zeigen, daß auch diese Lockerung keine Erweiterungsmöglichkeiten der Theorie mit sich bringt.

Stelle nicht näher darauf eingegangen werden¹; wegen einer einfachen Anwendung werden wir uns vielmehr sofort der Theorie des HILBERT-Raumes bedienen.

Die durch ihre Eigenschaften gekennzeichnete Bildung (Φ, Ψ) definiert im HILBERT-Raum — in dem Φ und Ψ Vektoren sind — eine Metrik². Jeder physikalischen Größe entspricht ein (hermitescher) Operator. Der Erwartungswert eines Operators F in einem durch den Vektor Ψ charakterisierten Zustand eines physikalischen Systems ist durch $(\Psi, F\Psi)$ gegeben. Damit nimmt das Bewegungsgesetz (10a) die Form an — mit $\beta = i/\hbar$ —

$$(\Phi, F\Phi)_t = (\Psi, e^{\beta t H_0} F_0 e^{-\beta t H_0} \Psi), \quad (\Phi, \Phi) = (\Psi, \Psi) = 1. \quad (14)$$

Nach den Ausführungen von § 3 folgt daraus, daß die Gruppe der unitären Transformationen das quantenmechanische Analogon der engeren kanonischen Gruppe der klassischen Mechanik ist. Diese Feststellung ist insofern bemerkenswert, als es auch noch andere kanonische Transformationen in der Quantenmechanik gibt, die nicht unitär sind, z.B. *lineare* Transformationen, bei denen die q_i und p_i kontragredient zueinander transformiert werden. Auch ihnen gegenüber sind die Eigenwertspektren bestimmter Operatoren invariant.

Die Beziehung (14) läßt mehrere Darstellungsmöglichkeiten des Bewegungsgesetzes offen:

1. Die HEISENBERG-Darstellung. Die Vektoren Φ, Ψ werden als *zeitunabhängig* und identisch betrachtet $\Phi = \Psi$. Die Zeitabhängigkeit ist also allein in den Operatoren enthalten. Das Bewegungsgesetz lautet damit wie Gl. (10a), woraus man die Differentialgleichung

$$\frac{dF}{dt} = \beta (HF - FH) \quad (15)$$

folgern kann. Die Größen werden dabei durch Matrizen repräsentiert.

2. Die SCHRÖDINGER-Darstellung. Die Operatoren werden als *zeitunabhängig* betrachtet $F(t) = F_0$. Die Zeitabhängigkeit von (14) ist allein in den Vektoren enthalten, d.h. es gilt

$$\Phi = e^{-\beta t H_0} \Psi,$$

woraus man das Bewegungsgesetz in der Form

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\beta H_0 \Phi \quad (16)$$

gewinnt. Gl. (16) ist nichts anderes als die (zeitabhängige) SCHRÖDINGER-Gleichung. H_0 ist dabei ein auf die Funktion $\Phi = \Phi(q_1^0, q_2^0 \dots q_n^0; t)$ wirkender (hermitescher) Differentialoperator.

¹ Ausführlicheres über die Darstellungsfragen ist einer gesonderten Behandlung vorbehalten.

² NEUMANN, J. v.: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin 1932.

3. Eine aus 1 und 2 *gemischte Darstellung*¹. Läßt H_0 z.B. eine Zerlegung der Form

$$H_0 = H_{10} + H_{20}$$

zu, so formt man (14) einfach um

$$\left. \begin{aligned} (\Phi, F\Phi)_t &= (\Psi, e^{\beta t H_0} e^{-\beta t H_{10}} e^{+\beta t H_{10}} F_0 e^{-\beta t H_{10}} e^{+\beta t H_{10}} e^{-\beta t H_0} \Psi) \\ &= (e^{\beta t H_{10}} e^{-\beta t H_0} \Psi, e^{\beta t H_{10}} F_0 e^{-\beta t H_{10}} \cdot e^{\beta t H_{10}} e^{-\beta t H_0} \Psi). \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

Damit läßt sich die Zeitabhängigkeit sowohl auf die Operatoren

$$F(t) = e^{\beta t H_{10}} F_0 e^{-\beta t H_{10}} \quad (17)$$

als auch auf die Vektoren ausdehnen

$$\Phi = e^{\beta t H_{10}} e^{-\beta t H_0} \Psi. \quad (18)$$

Das gesamte Bewegungsgesetz zerfällt damit, als Differentialgleichungen geschrieben, in das Gleichungspaar

$$\frac{dF}{dt} = \beta (H_1 F - F H_1) \quad (19a)$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\beta H_2 \Phi. \quad (19b)$$

Die Ableitung der letzten Gleichung sei kurz angegeben. Aus (18) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \beta H_{10} \Phi - \beta e^{\beta t H_{10}} H_0 e^{-\beta t H_0} \Psi \\ &= \beta (H_{10} - e^{\beta t H_{10}} H_0 e^{-\beta t H_{10}}) \Phi, \end{aligned}$$

woraus nach (17) unter Beachtung, daß $H_1(t) = H_{10}$ ist, Gl. (19b) folgt. Es ist darauf zu achten, daß alle Operatoren sich jetzt nach dem Zeitgesetz (17) transformieren; in (19b) ist also auch H_2 als von t abhängiger Operator anzusehen. Wenn H_{20} mit H_{10} vertauschbar ist, gilt natürlich auch $H_2(t) = H_{20}$. Eine Vereinfachung von (19b) läßt sich jedoch auch in dem etwas allgemeineren Fall erzielen, wenn

$$[H_{10}, H_{20}] = a, \quad (20)$$

wobei a ein Zahlfaktor ist. Nach (12) kann man (14) dann schreiben²

$$(\Phi, F\Phi)_t = (e^{-\beta t H_{20}} \Psi, e^{\beta t H_{10}} F_0 e^{-\beta t H_{10}} \cdot e^{-\beta t H_{20}} \Psi), \quad (14b)$$

¹ Eine Darstellung dieser Art ist z.B. die „interaction-representation“ in J. SCHWINGERS Fassung der Quantenelektrodynamik [Phys. Rev. **74**, 1439 (1948)]. Ein System aus Materie und elektrodynamischem Feld wird so beschrieben, daß H_1 die Summe der Energie von Materie und Feld („ungestörte“ HAMILTON-Funktion) und H_2 die Wechselwirkungsenergie ist.

² Wegen der allgemein nur für vertauschbare Operatoren A, B geltenden Relation $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ könnte man versucht sein, (14b) nur für vertauschbare H_{10} und H_{20} zu folgern. Man überzeugt sich aber, daß eine Relation der Form $e^A \cdot e^B \cdot F \cdot e^{-A} \cdot e^{-B} = e^{(A+B)} \cdot F \cdot e^{-(A+B)}$ auch gilt, wenn A und B der Bedingung (20) genügen.

woraus einerseits (17) bzw. (19a), andererseits aber

$$\Phi = e^{-\beta t H_{20}} \Psi, \quad (18a)$$

d.h. die Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\beta H_{20} \Phi \quad (19c)$$

folgt. Man kann also in diesem Fall zwei verschiedene Gl. (19b) und (19c) mit den verschiedenen Lösungen (18) und (18a) angeben. Dieser scheinbar paradoxe Sachverhalt findet seine Erklärung in der Tatsache, daß den Meßwerten physikalischer Größen in der Quantenmechanik nur Bildungen der Form (14) entsprechen, d.h. trotz ihrer Verschiedenheit liefern die beiden Lösungen dieselben Erwartungswerte für die Größen.

Damit seien die Betrachtungen über die Mechanik abgeschlossen.

§5. Ein formaler Zusammenhang der MAXWELLSchen Gleichungen mit der relativistischen Quantenmechanik.

1. Einige bei der axiomatischen Behandlung der Mechanik benutzte mathematische Methoden gestatten eine Anwendung auf die MAXWELLSchen Gleichungen und erlauben, eine formale Eigenschaft dieser Gleichungen zu formulieren, welche mit der DIRACschen Theorie des Elektrons in Zusammenhang gebracht werden kann.

Wir benutzen die MAXWELLSchen Gleichungen in der geläufigen Form

$$\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (21a)$$

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial H^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} = S^\mu. \quad (21b)$$

Der Zusammenhang der Tensoren $F_{\nu\mu}$ und $H^{\nu\mu}$ — welche die Feldgrößen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ enthalten — kann, da für den hier verfolgten Zweck belanglos, offen gelassen werden. S^μ bezeichnet den Viererstrom. Als räumliche Koordinaten werden x_1, x_2, x_3 verwendet, als zeitliche $x_4 = ct$. Gl. (21a) ist äquivalent mit der Aussage, daß $F_{\nu\mu}$ sich aus einem Potential Φ_ν ableiten läßt:

$$F_{\nu\mu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (22)$$

Wir führen nun Größen x_1, x_2, x_3, x_4 und y^1, y^2, y^3, y^4 als Erzeugende eines Potenzreihenringes $\mathfrak{F}_R$ ein, der von allen formalen Potenzreihen gebildet wird, deren Glieder nur Potenzprodukte der Form $x_1^{\epsilon_1} \cdot x_2^{\epsilon_2} \cdot x_3^{\epsilon_3} \cdot x_4^{\epsilon_4} \cdot (y^1)^{\eta_1} \cdot (y^2)^{\eta_2} \cdot (y^3)^{\eta_3} \cdot (y^4)^{\eta_4}$, versehen mit komplexen Koeffizienten, enthalten; für die Erzeugenden soll gelten

$$\left. \begin{aligned} x_\nu x_\mu - x_\mu x_\nu &= 0, & y^\nu y^\mu - y^\mu y^\nu &= 0, \\ y^\nu x_\mu - x_\mu y^\nu &= k \delta_\mu^\nu, & (v, \mu &= 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

δ_μ^ν ist das KRONECKER-Symbol. In $\mathfrak{F}_R$ lassen sich nun POISSON-Klammern einführen, welche durch

$$[x_\nu, x_\mu] = 0, \quad [y^\nu, y^\mu] = 0, \quad [y^\nu, x_\mu] = \delta_\mu^\nu$$

und die Axiome (I) definiert sind. Es gilt dann für beliebige Elemente χ, ξ aus $\mathfrak{F}_R$

$$k[\chi, \xi] = \chi\xi - \xi\chi. \quad (24)$$

Man sieht weiter, daß jede lineare Transformation, bei welcher die x_ν und y^ν kontragredient zueinander transformiert werden, das alte Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}_R$ in ein neues überführt, wobei die Relationen (23) und die Beziehung (24) erhalten bleiben. Die Stellung der Indizes soll in üblicher Weise den ko- und kontravarianten Transformationscharakter anzeigen. Wir führen schließlich noch die Größen $x^\nu = x_\nu$, $y^\nu = y_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$) und $x^4 = -x_4$, $y_4 = -y^4$ ein.

Ist φ ein Element aus $\mathfrak{F}_R$, das nur von den x_ν bzw. x^ν ($\nu = 1, \dots, 4$) abhängt, so ist auch $[y_\nu, \varphi]$ ein nur von diesen Größen abhängiges Element. Da die x_ν aber unter sich vertauschbar sind, ist für derartige Elemente die gewöhnliche Differentiation $\partial\varphi/\partial x_\nu$ bzw. $\partial\varphi/\partial x^\nu$ erklärt. Durch einen axiomatischen Vergleich kann man — in Analogie zu den Ausführungen in § 1 und § 2 — daraus folgern

$$[y^\nu, \varphi] = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}, \quad [y_\nu, \varphi] = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}.$$

Nach den Axiomen (I) gilt somit, da $[y_\nu, y_\mu] = 0$ und $[\varphi_\nu, \varphi_\mu] = 0$, wenn $\varphi_\nu = \varphi_\nu(x_\lambda)$, $\varphi_\mu = \varphi_\mu(x_\lambda)$,

$$[y_\nu + \varphi_\nu, y_\mu + \varphi_\mu] = [y_\nu, \varphi_\mu] - [y_\mu, \varphi_\nu] = \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu}.$$

Man sieht, daß man durch Einführung von $z_\nu = y_\nu + \varphi_\nu(x_\lambda)$ Gl. (22) formal schreiben kann

$$[z_\nu, z_\mu] = f_{\nu\mu}; \quad (25)$$

$f_{\nu\mu}$ ist dabei wieder ein nur von den x_λ bzw. x^λ ($\lambda = 1, \dots, 4$) abhängendes Element von $\mathfrak{F}_R$. φ_ν und $f_{\nu\mu}$ entsprechen den Potentialen Φ_ν und dem Feldtensor $F_{\nu\mu}$ der MAXWELLSchen Theorie. Ein spezielles Feld ist durch Vorgabe bestimmter $\varphi_\nu(x_\lambda)$ ($\nu, \lambda = 1, \dots, 4$) charakterisiert, etwa wie in der Mechanik ein spezielles mechanisches System durch Angabe seiner HAMILTON-Funktion gekennzeichnet wird. Gl. (21a) findet ihr Äquivalent in der JACOBI-Identität (Ie).

Schließlich führt Gl. (21b) auf analoge Weise zu

$$\sum_{\nu=1}^4 [z_\nu, h^{\nu\mu}] = s^\mu,$$

wobei s^μ und $h^{\nu\mu}$ wieder nur von den x_λ abhängen.

Gleichbedeutend mit (25) ist die Beziehung

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x^\nu} + b \varphi_\nu\right) \left(a \frac{\partial}{\partial x^\mu} + b \varphi_\mu\right) - \left(a \frac{\partial}{\partial x^\mu} + b \varphi_\mu\right) \left(a \frac{\partial}{\partial x^\nu} + b \varphi_\nu\right) = a b f_{\nu\mu}, \quad (25a)$$

wobei a und b beliebige Zahlfaktoren sind. (25a) ist eine *symbolische* Formulierung der Differentialgleichung (22).

Analog wie in der Mechanik haben die betrachteten Größen nur *formalen* Charakter. Es ist daher naheliegend, sie zum Zwecke einer Bewertung mit Zahlen als Operatoren in einem Funktionenraum darzustellen. Eine fundamentale Rolle spielt nun der Operator $a \frac{\partial}{\partial x^\nu} + b \varphi_\nu$; es bleibt somit die Aufgabe, mit ihm ein Eigenwertproblem zu formulieren. Auf diese Weise erhält man, wie nun gezeigt wird, einen formalen Zusammenhang zwischen MAXWELL- und DIRAC-Theorie.

2. Aus dem Bestehen einer Gleichung der Form

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x^\nu} + b \varphi_\nu\right) \psi = \lambda \psi$$

folgt aber — da bei LORENTZ-Transformationen der Operator wie ein Vektor und λ wie ein Skalar transformiert werden —, daß die Funktion ψ die Transformationseigenschaften eines (ungeradzahlig indizierten) Spinors haben muß.

Der v. D. WAERDENSche Spinorkalkül^{1,2} bietet ein zweckmäßiges Hilfsmittel zur Beschreibung dieses Eigenwertproblems. Dem Operator $a \frac{\partial}{\partial x^\nu} + b \varphi_\nu$ entspricht der Spinor

$$d_{k\dot{i}} = a \partial_{k\dot{i}} + b \varphi_{k\dot{i}},$$

wobei $\varphi_{k\dot{i}}$ der dem Potential φ_ν korrespondierende Spinor ist. Wir wollen im folgenden die Größen der Theorie in Tensor- und Spinorschreibweise jeweils mit demselben Buchstaben bezeichnen; die Unterscheidung wird durch griechische (Tensoren) und lateinische (Spinoren) Indizes hervor gehoben. Weiter soll von nun ab die Summationskonvention benutzt werden, über gleiche (oben und unten vorkommende) Indizes aufzusummieren. Gl. (25a) lautet in Spinorform

$$d_{k\dot{i}}^{\dot{i}} d_{\dot{i}l}^{\dot{i}} + d_{\dot{i}k}^{\dot{i}} d_{\dot{i}l}^{\dot{i}} = a b f_{kl}. \quad (25a')$$

Der *symmetrische* Spinor f_{kl} korrespondiert dabei dem schiefsymmetrischen Tensor $f_{\nu\mu}$. Unter Benutzung eines Spinors erster Stufe ψ^l formen wir (25a') um, indem wir von rechts mit ψ^l multiplizieren und über $l = 1, 2$ aufsummieren. Nach einer allgemeinen Spinorrelation² gilt

$$d_{\dot{i}l}^{\dot{i}} d_{kl}^{\dot{i}} \psi_k + d_{kl}^{\dot{i}} d_{\dot{i}k}^{\dot{i}} \psi^l + d_{k\dot{i}}^{\dot{i}} d_{\dot{i}l}^{\dot{i}} \psi_l = 0,$$

¹ WAERDEN, B. L. v. D.: Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, § 20. Berlin 1932.

² LAPORTE, O., u. G. E. UHLENBECK: Phys. Rev. **37**, 1380 (1931).

und damit geht (25 a') über in

$$-\frac{1}{2} d^{l\dot{r}} d_{l\dot{i}} \psi_k + d_{\dot{k}}^{\dot{r}} d_{i\dot{l}} \psi^l = \frac{a b}{2} f_{kl} \psi^l. \quad (26)$$

Der erste Term links ist in Tensorschreibweise der „Wellenoperator mit Potentialen“ $\left(a \frac{\partial}{\partial x^v} + b \varphi_v\right) \left(a \frac{\partial}{\partial x_v} + b \varphi^v\right)$.

Das einfachste Eigenwertproblem hat die Gestalt

$$d_{\dot{r}}^l \psi_l = \lambda \psi_{\dot{r}}. \quad (27)$$

Dem Übergang zur konjugiert-komplexen Gleichung entspricht in der Spinoranalysis die Ersetzung von punktierten durch unpunktete Indizes und umgekehrt. Ein solcher Übergang wird im allgemeinen $d_{\dot{k}\dot{r}}$ überführen in $\bar{d}_{k\dot{r}} = \bar{a} \partial_{k\dot{r}} + \bar{b} \varphi_{k\dot{r}}$, falls a und b nicht reell sind ($\bar{a} =$ Konjugiert-komplexes von a usw.). Infolgedessen folgt aus (27)

$$\bar{d}_{k\dot{r}}^{\dot{i}} \psi_{\dot{r}} = \bar{\lambda} \psi_k. \quad (27a)$$

Sind dagegen a, b reell, so können wir die Überstreichung von $d_{k\dot{r}}$ in (27a) fortlassen. Damit folgt aus (27) und (27a)

$$d_{\dot{k}}^l d_{\dot{r}}^l \psi_l = |\lambda|^2 \psi_k,$$

und Gl. (26) nimmt die Gestalt an

$$\left\{ -\frac{1}{2} d^{l\dot{r}} d_{l\dot{i}} - |\lambda|^2 \right\} \psi_k = \frac{a b}{2} f_{kl} \psi^l. \quad (26a)$$

Von der angeführten Realitätsbeschränkung kann man sich einfach befreien, wenn das Eigenwertproblem unter Einführung zweier Spinoren ψ_k und χ_k formuliert wird:

$$d_{\dot{r}}^l \psi_l = \lambda \chi_{\dot{r}}, \quad d_{\dot{k}}^{\dot{r}} \chi_{\dot{r}} = \mu \psi_k. \quad (28)$$

Damit ergibt sich aus (26) z.B.

$$\left\{ -\frac{1}{2} d^{l\dot{r}} d_{l\dot{i}} - \lambda \mu \right\} \psi_k = \frac{a b}{2} f_{kl} \psi^l.$$

Durch linksseitige Multiplikation mit χ^k und Summation über $k=1, 2$ folgt daraus die LORENTZ-invariante Beziehung

$$\chi^k \square' \psi_k - \lambda \mu \chi^k \psi_k = \frac{a b}{2} f_{kl} \chi^k \psi^l, \quad (29)$$

wobei $\square'$ den „Wellenoperator mit Potentialen“ bezeichnen soll.

Die Gl. (28) — und die zu ihnen konjugiert-komplexen — sind bei geeigneter Festsetzung der Konstanten $a = \hbar/i$, $b = e/c$, $\lambda = -\mu = -m c$

die DIRACschen Gleichungen^{1,2}. Die invariante Bildung (29) läßt sich bekanntlich als quantenmechanisch-relativistischer Energiesatz auffassen; die rechte Seite gibt dabei die Spinkorrektur an. *Wir haben also gezeigt, daß der mechanische Energiesatz des Elektrons (29) aus der formalen Operatorrelation (25a) hervorgeht, welche ihrerseits die MAXWELLSchen Gl. (22) bzw. (21a) repräsentiert.* Die Interpretationsfähigkeit von (29) als Energiesatz, läßt (28) als quantenmechanisch-relativistische Bewegungsgleichungen eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ und endlicher Ruhenergie ansehen. Eine ähnliche Schlußfolgerung auf (26a) angewendet, würde (27) als Bewegungsgleichung eines „Teilchens“ mit dem Spin $\frac{1}{2}$ und der Ruhenergie Null ansehen; denn bei linksseitiger Multiplikation von (26a) mit ψ^k und Summation über k fällt wegen $\psi^k \psi_k = 0$ das Glied mit dem Faktor $|\lambda|^2$ heraus.

3. In diesem Zusammenhang sei noch auf ein Ergebnis hingewiesen, das physikalisches Interesse beanspruchen kann. Um es in einer ge-läufigen Form wiederzugeben, wollen wir Teile der obigen Rechnung mit Hilfe der DIRAC-Matrizen umschreiben. Es sei $w_\nu = a \frac{\partial}{\partial x^\nu} + b \varphi_\nu$, $\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu = 2g_{\nu\mu}$, wobei $g_{\nu\mu}$ der Fundamentaltensor der speziellen Relativitätstheorie ist. Die aus (25a)

$$w_\nu w_\mu - w_\mu w_\nu = a b f_{\nu\mu}$$

folgende Gl. (29) erhält man durch die Bildung

$$\bar{\psi} \gamma^\nu \gamma^\mu (w_\nu w_\mu - w_\mu w_\nu) \psi = a b \bar{\psi} \gamma^\nu \gamma^\mu f_{\nu\mu} \psi,$$

woraus durch Umformung entsteht

$$\bar{\psi} \{ \gamma^\nu w_\nu - (\gamma^\nu w_\nu) (\gamma^\mu w_\mu) \} \psi = \frac{a b}{2} \bar{\psi} \gamma^\nu \gamma^\mu f_{\nu\mu} \psi. \quad (29a)$$

Die DIRACschen Gleichungen

$$-i \gamma^\nu w_\nu \psi = \mu \psi \quad (28a)$$

geben (29a) die Form des relativistischen Energiesatzes. Nun ist (28a) eine Eigenwertgleichung des Operators $-i \gamma^\nu w_\nu$ und $\mu = m c$ ein Eigenwert dieses Operators. Andererseits setzt sich dieser Operator additiv aus Teiloperatoren zusammen. Benutzt man nun (28a) als Eigenwertgleichung für einen dieser Teiloperatoren, z.B. für den vorkommenden Operator $\partial/\partial t$, so muß man darauf achten, daß dies nicht in jedem Falle zulässig ist, da sich ein Operator, der aus einzelnen Teiloperatoren zusammengesetzt ist, durchaus nicht immer gleichzeitig mit einem seiner Teiloperatoren auf Diagonalform bringen läßt. Wenn man es trotzdem

¹ WAERDEN, B. L. V. D.: I. c.

² LAPORTE, O., u. G. E. UHLENBECK: I. c.

erzwingt, läuft man Gefahr, unter Umständen wesentliche Eigenschaften der Theorie zu zerstören.

In der üblichen Behandlung der DIRACschen Theorie wird nun μ als Zahl bzw. als Zahlfaktor multipliziert mit dem Einheitsoperator angesehen. Dies ist aber der Forderung äquivalent, daß man den Operator der Ruhenergie *stets* gleichzeitig mit jedem anderen Operator, also auch dem der Gesamtenergie auf Diagonalform bringen kann. Hält man an dieser Bedingung fest, zerstört man quantenmechanisch-relativistische Eigenschaften der Theorie, insbesondere die Vertauschungsrelation zwischen Energie und Zeit¹. Hält man andererseits an dieser fest, so muß man der Ruhmasse *echten* Operatorcharakter zuschreiben, da dann die Operatoren von Ruhmasse und Gesamtenergie durchaus nicht immer vertauschbar sind. Diese Tatsache kann in Anbetracht der in letzter Zeit experimentell gefundenen Korrekturen an einigen Aussagen der DIRACschen Theorie vielleicht von Bedeutung sein.

Den Herren Prof. FLÜGGE und Prof. REIDEMEISTER danke ich für viele wertvolle Hinweise und aufschlußreiche Diskussionen. Mein Dank gilt ferner der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft, deren Hilfe es mir ermöglichte, die Arbeit zu beenden.

Marburg a. d. Lahn, Institut für Struktur der Materie.

¹ Nähere Ausführungen sind einer folgenden Arbeit vorbehalten.

Lebenslauf.

Ich, GOTTFRIED FALK, wurde am 16. August 1922 zu Gelsenkirchen als Sohn des Dipl.-Ing. KURT FALK und seiner Ehefrau GERTRUD, geb. HÄRTEL, geboren. Ich bin deutscher Staatsangehörigkeit und evangelischer Konfession. Von Ostern 1929 bis Ostern 1933 besuchte ich die Volksschule und wechselte dann zum humanistischen Gymnasium in Gelsenkirchen-Schalke über, das ich im Frühjahr 1941 mit dem Reifezeugnis verließ. Anschließend wurde ich zum Arbeitsdienst und darauf zur Wehrmacht eingezogen. Einen Urlaub benutzte ich zur Immatrikulation an der Universität Münster i. Westf. im Wintersemester 1941.

Sommer 1945 wurde ich aus amerikanischer Kriegsgefangenschaft entlassen. Zum Sommersemester 1946 konnte ich an der Universität Marburg a. d. Lahn mein Studium endgültig beginnen. Im Dezember 1948 legte ich meine Diplom-Hauptprüfung in Physik ab.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten: BACHMANN, DEURING, FLÜGGE, GRÖTZSCH, GRÜNEISEN, HETTER, HÜCKEL, JOST, KRAFFT, OSTMANN, REIDEMEISTER, VOGT, WALCHER.

1871

1872

1873

1874

1875

1876

1877

1878

1879

1880

1881

1882

1883

1884

1885

1886

1887

1888

1889

1890

1891

1892

1893

1894

1895

1896

1897

1898

1899

1900

1901

1902

1903

1904

1905

1906

1907

1908

1909

1910

1911

1912

1913

1914

1915

1916

1917

1918

1919

1920

1921

1922

1923

1924

1925

1926

1927

1928

1929

1930

1931

1932

1933

1934

1935

1936

1937

1938

1939

1940

1941

1942

1943

1944

1945

1946

1947

1948

1949

1950

1951

1952

1953

1954

1955

1956

1957

1958

1959

1960

1961

1962

1963

1964

1965

1966

1967

1968

1969

1970

1971

1972

1973

1974

1975

1976

1977

1978

1979

1980

1981

1982

1983

1984

1985

1986

1987

1988

1989

1990

1991

1992

1993

1994

1995

1996

1997

1998

1999

2000